

## Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung

1.0 An steilen schneebedeckten Berghängen kommt es im Frühjahr häufig zum Abgleiten von flachen, etwas überhängenden Schneemassen, sogenannten Schneebrettern. Den Weg, den ein Schneebrett an einem Berghang mit  $60^\circ$  Neigung in Abhängigkeit der Zeit  $t$  zurücklegt, kann mit Hilfe der Funktion  $s(t) = 4,285t^2 - 0,035t$  beschrieben werden.

1.1 Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Schneebretts zwischen 3 sec. und 5 sec..

1.2 30 m unterhalb der Abbruchstelle sind zur Verlangsamung abgleitender Schneebretter Hindernisse befestigt.  
Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit die Schneemassen auf die Hindernisse treffen.

1.3 Ermitteln Sie, mit welcher Geschwindigkeit die Schneemassen nach 100 m das Tal erreichen, wenn man annimmt, dass der Schnee reibungsfrei ins Tal abgleiten kann.

2.0 Die Holzmasse (in Kubikmeter) eines Waldes verändert sich wie folgt:

Jahr	0	1	2	3	4	5
$m^3$	50000	59999	72438	87317	104636	124395

2.1 Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, die die Veränderung der Holzmasse beschreibt.

2.2 Berechnen Sie die mittlere Änderung der Holzmasse für die Zeiträume (1) 0 bis 2 Jahre (2) 1 bis 5 Jahre.

2.3 Ermitteln Sie die Änderung der Holzmasse zum Zeitpunkt 3 Jahre.

3.0 Die Bevölkerung von Neudorf hat sich seit 1970 näherungsweise gemäß  $N(t) = 2t^2 + 120t + 5000$  entwickelt.  $N(t)$  ist die Einwohnerzahl zum Zeitpunkt  $t$ ,  $t$  ist die Zeitspanne seit dem 1.1.1970 in Jahren gemessen.

3.1 Bestimmen Sie, welche Einwohnerzahlen sich an den Stichtagen 1.1.1990 und 1.7.2000 ergeben.

3.2 Ermitteln Sie die durchschnittliche Änderung der Einwohnerzahl im ersten Jahrzehnt.

3.3 Berechnen Sie die momentane Änderungsrate zum Beginn des Jahres 1980.

- 4 Eine Schnecke kriecht auf einer flachen Straße vom Startpunkt aus geradlinig immer in dieselbe Richtung. Modellhaft wird angenommen:

Die Funktion  $s$  mit  $s: t \mapsto s(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2$ ;  $0 \leq t \leq 3$  gibt den zurückgelegten

Weg  $s$  (gemessen in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (gemessen in Minuten) wieder.

Die 1. Ableitung der Funktion  $s$  nach der Variablen  $t$  ist die Geschwindigkeit der Schnecke zum entsprechenden Zeitpunkt  $t$ .

(Auf Benennungen wird bei den folgenden Rechnungen verzichtet!)

Berechnen Sie den zurückgelegten Weg und die jeweilige Geschwindigkeit der Schnecke zu den Zeitpunkten  $t = 1$  und  $t = 2$ .

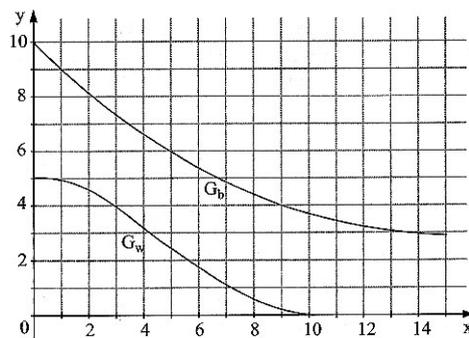
(Abitur 2003 AI)

- 5.0 Die untenstehende Skizze zeigt den Querschnitt einer überdachten Wasserrutsche. Der Graph  $G_w$  stellt die Wasserrutsche, der Graph  $G_b$  stellt die Bedachung dar, die über die Rutsche hinaus verlängert ist. Die Funktionen  $w$  und  $b$  sind gegeben durch

$$w(x) = \frac{1}{100}(x^3 - 15x^2 + 500) \text{ mit } D_w = [0; 10] \text{ und}$$

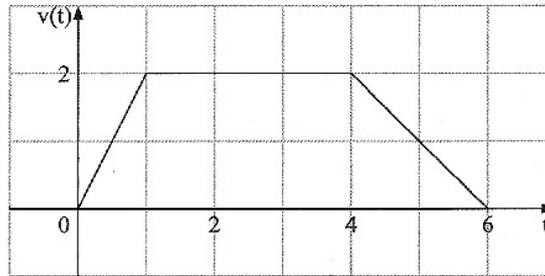
$$b(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 \text{ mit } D_b = [0; 15]$$

(Abitur 2005 All)



- 5.1 Berechnen Sie, an welcher Stelle  $x_1$  die Wasserrutsche das stärkste Gefälle aufweist.
- 5.2 Kondenswasser, das sich an der Unterseite der Bedachung gebildet hat, tropft von der tiefsten Stelle des Daches herunter. Berechnen Sie die Stelle  $x_2$ , an der das Wasser heruntertropft.
- 5.3 Die Funktion  $d(x)$  mit  $D_d = [0; 10]$  beschreibt den in  $y$ -Richtung gemessenen Abstand zwischen Wasserrutsche und Dach. Zeigen Sie, dass sich  $d(x)$  auch in der Form
- $$d(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$$
- schreiben lässt.
- 5.4 Aus Sicherheitsgründen wird ein in  $y$ -Richtung gemessener Mindestabstand zwischen Wasserrutsche und Dach von 3,30 (LE) vorgegeben. Untersuchen Sie rechnerisch, ob dieser Mindestabstand an jeder Stelle eingehalten wird.

6.0 Untenstehendes Diagramm beschreibt den Zusammenhang zwischen der Momentangeschwindigkeit  $v(t)$  eines Fahrzeuges (in Kilometer pro Minute) und der Zeit  $t$  (in Minuten). (Abitur 2006 All)



6.1 Begründen oder widerlegen Sie anhand des Diagramms die Behauptung: Die Funktion  $v$  ist im dargestellten Bereich differenzierbar.

6.2 Geben Sie die Geschwindigkeiten zur Zeit  $t_1 = 1$  und  $t_2 = 5$  an.

6.3 Die 1. Ableitung der Geschwindigkeit  $v(t)$  ist die Beschleunigung  $a(t)$  des Fahrzeugs. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $a$ .

6.4 Die Geschwindigkeit  $v(t)$  ist die 1. Ableitung der Funktion  $s(t)$ , die den in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weg beschreibt. Bestimmen Sie mithilfe der Zeichnung den am Ende (nach 6 Minuten) zurückgelegten Weg.

7.0 Im letzten Jahr traf sich eine Gruppe von jungen Forschern auf der Giechburg in Bayern, um die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss der Schwerkraft zu untersuchen. Die Bewegung eines Körpers im freien Fall wird durch die Funktion  $s$  mit  $s(t) = 0,5gt^2$  beschrieben, wobei  $t$  die Zeit in Sekunden angibt und  $g$  für die Fallbeschleunigung steht.

7.1 Die Geschwindigkeit eines Körpers im freien Fall beträgt nach 5 s ungefähr 50 m/s. Berechnen Sie die Fallbeschleunigung näherungsweise.

7.2 Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit nach 10 Sekunden.

7.3 Ermitteln Sie, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper auf den Boden aufschlägt, wenn er aus einer Höhe von 20 m zur Erde fällt.

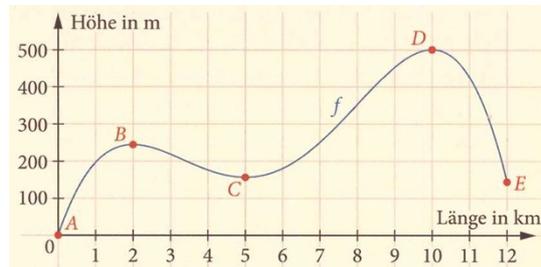
8.0 Durch die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -9,2x^2 + 100$ ,  $x \in [0;3]$  wird der Abstand zwischen dem Messgerät eines Polizisten und einem Fahrzeug aufgezeichnet. Dabei gibt  $f(x)$  den Abstand in Metern in Abhängigkeit von der Zeit  $x$  in Sekunden an.

8.1 Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von  $f$  mit passender Skalierung in ein Koordinatensystem.

8.2 Ermitteln Sie, wie weit das Fahrzeug zu Beginn der Aufzeichnung vom Polizisten entfernt war.

- 8.3 Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v_s$  des Fahrzeugs in einem geeigneten Intervall und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- 8.4 Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit  $v_t$  des Fahrzeugs zum Zeitpunkt  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$ .
- 8.5 Bestimmen Sie mithilfe des Differenzialquotienten eine Formel, mit der die Geschwindigkeit  $v$  des Fahrzeugs zu jedem Zeitpunkt  $x_0$  berechnet werden kann.
- 8.6 Begründen Sie mit einem geeigneten Funktionsgraphen, ob das Fahrzeug zu irgendeinem Zeitpunkt während der Geschwindigkeitsmessung die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h überschritten hat. Zeichnen Sie den Graphen in obiges Koordinatensystem ein.
- 8.7 Bestimmen Sie, was Sie über die Geschwindigkeit des Fahrzeugs zu Beginn der Messung aussagen können.
- 9.0 Das Weg-Zeit-Gesetz für den senkrechten Wurf lässt sich durch die ganzrationale Funktion  $s$  mit  $s(t) = v_0 t - 0,5gt^2$  beschreiben. Dabei bezeichnet  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit (z.B. eines Balles beim Verlassen der Hand) und  $g$  die Gravitationskonstante ( $10 \text{ m/s}^2$ ). Die Anfangsgeschwindigkeit ist  $30 \text{ m/s}$ .
- 9.1 Bestimmen Sie, in welcher Höhe sich der Ball nach 1 sec, 2 sec bzw. 5 sec befindet.
- 9.2 Berechnen Sie die Ballgeschwindigkeit nach 1 sec, 2 sec bzw. 5 sec.
- 9.3 Ermitteln Sie, wie schnell der Ball fliegt, wenn er auf einer Höhe von 33,75 m ist und bestimmen Sie, nach welcher Zeitdauer das der Fall ist.
- 9.4 Bestimmen Sie, wie lange es dauert, bis der Ball wieder die Abwurfhöhe erreicht hat und ermitteln Sie, wie schnell er in diesem Augenblick fliegt.
- 9.5 Bestimmen Sie, wie schnelle und wie hoch der Ball in dem Moment fliegt, in dem er seine höchste Flughöhe erreicht hat.

10.0 Das Höhenprofil einer 12 km langen Wanderung lässt sich annähernd durch den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -0,75x^4 + 17x^3 - 120x^2 + 300x$  mit  $x \in [0;12]$  darstellen.



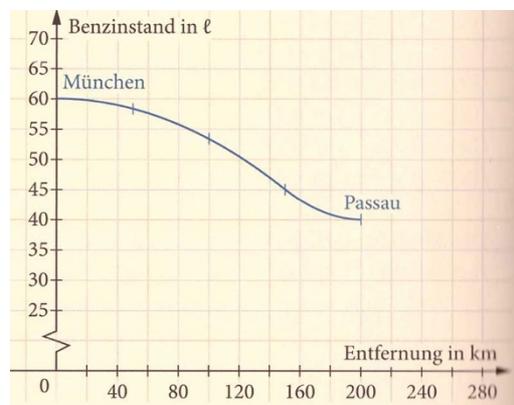
10.1 Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung der folgenden Streckenabschnitte und geben Sie die Ergebnisse in Prozent an:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$  und  $\overline{AE}$ .

10.2 Berechnen Sie die momentane Steigung für die folgenden Kilometerstände und geben Sie auch diese Ergebnisse in Prozent an: 1 km, 3 km, 8 km und 11 km.

10.3 Ermitteln Sie rechnerisch die Stelle, an der der Weg genauso steil ansteigt wie bei Kilometer 1.

10.4 Berechnen Sie die Stellen, an denen die Steigung 0 % beträgt und berechnen Sie auch, auf welcher Höhe dies jeweils der Fall ist.

11.0 Herr Söst macht einen Wochenendausflug von München nach Passau. Er möchte benzinsparend fahren und im Durchschnitt nicht mehr als 9 l pro 100 km verbrauchen. Nach 150 km Fahrt lässt er sich von seinem Bordcomputer eine Grafik zum Benzinstand während der bisherigen Fahrt geben. In dem Streckenabschnitt 0 km bis 150 km kann der Benzinstand durch die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{1500}x^2 + 60$  beschrieben werden.



11.1 Berechnen Sie den durchschnittlichen Benzinverbrauch im Streckenabschnitt 0 km bis 150 km.

11.2 Berechnen Sie den lokalen Benzinverbrauch an der Stelle 50 km.

12.0 Das Streckenprofil der 20. Etappe der 103. Tour de France lässt sich vom 10. bis zum 40. Kilometer näherungsweise durch die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \frac{5}{4} \cdot \left( \frac{14675}{27} x^3 - 4402,5x^2 + 11299,75x - 8158,375 \right) \text{ mit } D_f = [2; 3,5]$$

(1 LE = 10 km) beschreiben. Die Höhe wird in Meter angegeben.

12.1 Zeigen Sie, dass die Fahrer nach 21 km den lokal höchsten Berg Col de Aravis und nach 33 km den am tiefsten gelegenen Ort Le Grand-Bofnand erreichen.

12.2 Ermitteln Sie, welche Strecke die Fahrer zurücklegen müssen, bis sie das lokal größte Gefälle erreichen und berechnen Sie, in welcher Höhe sie sich dann befinden.

13.0 Die Funktion  $h$  beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Pegelstandes eines Flusses während eines Hochwassers.

Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  wird vom Fluss die Meldegrenze überschritten. Ab diesem

Zeitpunkt gibt die Funktionsgleichung  $h(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$  mit  $t \in D_h = [0; 6]$

den Hochwasserstand des Flusses wieder, wobei  $t$  die Zeit in Tagen und  $h(t)$  der Pegelstand über Normal in Metern ist.

13.1 Geben Sie die Meldegrenze zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  an.

13.2 Ermitteln Sie den Pegelstand nach einem halben Tag. Ein Beobachter vermutet, dass der Pegelstand in der zweiten Hälfte des ersten Tages um den gleichen Wert ansteigt wie im ersten halben Tag. Berechnen Sie den Pegelstand  $P^*$ , der sich unter dieser Voraussetzung am Ende des ersten Tages einstellen würde.

13.3 Berechnen Sie den tatsächlichen Pegelstand für  $t = 1$  und erklären Sie den Unterschied zu dem in 13.2 berechneten Wert  $P^*$ .

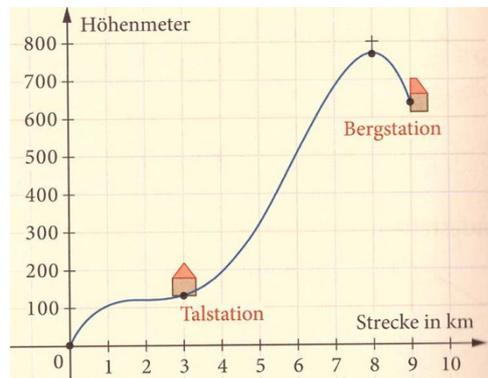
13.4 Berechnen Sie den Zeitpunkt und Höhe des maximalen Pegelstandes.

13.5 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu welchem der Pegelstand am stärksten abnimmt.

13.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $h$  im Intervall  $[0; 6]$  in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichnen Sie den Punkt  $P^*$  und den tatsächlichen Pegelstand  $h(t = 1)$ .

13.7 Ein Pegelstand von 3 m über Normal gilt als Alarmgrenze. Berechnen Sie, zu welchen Zeitpunkten Alarm ausgelöst bzw. wieder aufgehoben wird.

- 14.0 Die Abbildung zeigt das Höhenprofil einer Bergbesteigung. Die Kurve entspricht näherungsweise dem Graphen der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = -1,5x^4 + 24x^3 - 108x^2 + 192x$ .



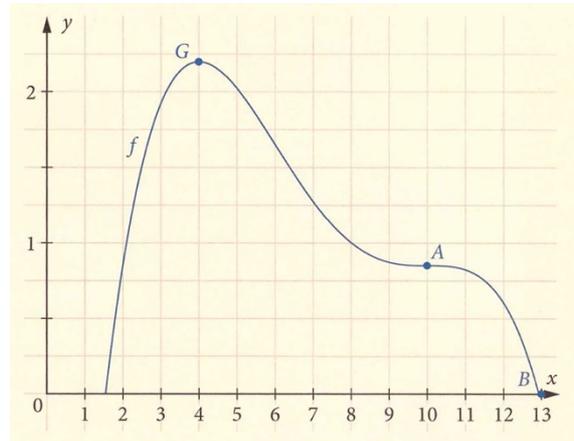
- 14.1 Berechnen Sie die Zahl der zu überwindenden Höhenmeter und geben Sie an, welche Strecke in waagrechter Richtung bis zum Gipfel zurückgelegt werden müssen.
- 14.2 Die Wanderung endet nach genau 9 km an der Bergstation der Seilbahn, die die Wanderer wieder ins Tal bringt.  
Ermitteln Sie, auf welcher Höhe sich die Bergstation befindet.
- 14.3 192 m oberhalb der Talstation kreuzt die Seilbahn den Wanderweg.  
Lesen Sie aus der Zeichnung ab, nach welcher Wegstrecke dies geschieht und bestätigen Sie den abgelesenen Wert durch Rechnung.
- 14.4 Ermitteln Sie die steilste Stelle des Weges zwischen Talstation und Gipfel.  
Berechnen Sie den Anstieg an dieser Stelle und ebenso die Zahl der Höhenmeter, die bis dorthin geschafft werden müssen.
- 14.5 Ermitteln Sie, an welcher Stelle des Aufstiegs (vom Startpunkt bis zum Gipfel) die geringste Steigung vorliegt. Berechnen Sie diese und geben Sie auch, auf welcher Höhe (vom Startpunkt aus gemessen) sich diese Stelle befindet.
- 14.6 Ermitteln Sie die mittlere Steigung des Aufstiegs und den mittleren Anstieg der gesamten Wanderung.
- 14.7 Ermitteln Sie, bei welchem Kilometerstand der Weg genauso steil ansteigt wie zu Beginn der Wanderung.

- 15.0 Corinna ist die ältere Schwester von Marie. Jedes Mal, wenn Marie einen Monat älter wird, misst Corinna nach, wie groß ihre kleine Schwester geworden ist. Jetzt hat sie gelesen, dass sich das Wachstum eines Kindes in den ersten neun Lebensmonaten annähernd durch die Funktion  $g$  mit beschreiben lässt.
- 15.1 Zeichnen Sie den Graphen von  $g$  im Intervall  $[0;9]$  mithilfe einer Wertetabelle und beschreiben Sie anhand der Zeichnung das Wachstum eines Kindes in den ersten neun Lebensmonaten.
- 15.2 Untersuchen Sie die Funktion auf Extremstellen und Wendestellen.  
Bestimmen Sie die zugehörigen Punkte des Graphen und markieren Sie diese in der Zeichnung.
- 15.3 Interpretieren Sie die Bedeutung des Wendepunktes im Kontext der Aufgabe.
- 15.4 Begründen Sie, warum  $g$  nicht geeignet ist, das Wachstum eines Kindes im gesamten ersten Lebensjahr darzustellen.
- 16.0 Die Konzentration eines Medikamentenwirkstoffs im Blut in Abhängigkeit der Zeit kann durch die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(t) = -0,001t^4 + 0,03t^3 - 0,3t^2 + t$  beschrieben werden. Dabei gibt  $t$  die Zeit in Stunden und  $f(t)$  die Konzentration in mg/ml an.
- 16.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.
- 16.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang.
- 16.3 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Wirkstoffkonzentration am höchsten ist und wie hoch diese dann ist.
- 16.4 Erläutern Sie, was eine positive bzw. negative Steigung über die Wirkstoffkonzentration im Blut aussagt.
- 16.5 Berechnen Sie die Steigung an der Stelle  $t = 1$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 16.6 Beurteilen Sie, in welchem Zeitraum die Funktion  $f$  die Wirkstoffkonzentration des Medikaments sinnvoll beschreibt.
- 16.7 Um eine Wirkung zu erzielen, muss die Konzentration des Medikaments mindestens 0,3 mg/ml betragen.  
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.

17.0 Ein Gebirgsmassiv hat das abgebildete Profil, das durch den Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = -\frac{1}{320}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 5x - \frac{27}{5} \quad \text{mit } D_f = [1,55;12,92] \text{ beschrieben wird}$$

(Angaben in km).



17.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Gipfels  $G$  und untersuchen Sie den Graphen  $G_f$  auf weitere Extrempunkte.

17.2 Am Punkt  $A(10|0,85)$  befindet sich eine Alm. Zu Füßen des Massivs liegt direkt am Berghang das Dorf  $B(13|0)$ . Vom Dorf  $B$  ist eine geradlinige, unterirdisch verlaufende Zahnradbahn zur Alm  $A$  in Planung.

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch  $A$  und  $B$  sowie die Länge der Zahnradbahn.

17.3 Ein Bergsteiger will die Strecke von  $A$  auf den Gipfel  $G$  auf kürzestem Weg erklimmen und geht deshalb auf der Flanke des Berges, also entlang des Graphen von  $f$ . Ermitteln Sie, in welchem Punkt am Berg sein Weg die größte Steigung hat.

17.4.0 Ein Gleitschirmflieger startet im Punkt  $G$  in Richtung  $A$ . Die parabelförmige Flugbahn

seines Fluges wird durch den Graphen der Funktion  $p$  mit  $p(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{5}x + 1,8$

beschrieben.

17.4.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass gilt:  $f(4) = p(4)$  und  $f'(4) = p'(4)$ .

Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Zusammenhang.

17.4.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Punkt, in dem der Gleitschirmflieger landet.

17.4.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass gilt:  $f'(12) = p'(12)$ .

Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

17.4.4 Übertragen Sie den Graphen der Funktion  $f$  in ein geeignetes Koordinatensystem und zeichnen Sie die Flugbahn des Gleitschirmfliegers ein.

## Lösungen

1.1

$$s(3) = 4,285 \cdot 3^2 - 0,035 \cdot 3 = 38,46 \text{ m}$$

$$s(5) = 4,285 \cdot 5^2 - 0,035 \cdot 5 = 106,95 \text{ m}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{106,95 \text{ m} - 38,46 \text{ m}}{5 \text{ sec} - 3 \text{ sec}} = \frac{68,49 \text{ m}}{2 \text{ sec}} = 34,245 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

1.2

$$30 \text{ m} = 4,285 \cdot t^2 - 0,035 \cdot t \Rightarrow 4,285 \cdot t^2 - 0,035 \cdot t - 30 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{0,035 \pm \sqrt{(-0,035)^2 - 4 \cdot 4,285 \cdot (-30)}}{8,57} = \frac{0,035 \pm \sqrt{514,20}}{8,57} =$$

$$\frac{0,035 \pm 22,68}{8,57} \Rightarrow t_1 = 2,65 \quad t_2 = -2,64 (\notin D)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 8,57t - 0,035 \Rightarrow \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=2,65} = 8,57 \cdot 2,65 - 0,035 = 22,68 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

1.3

$$100 \text{ m} = 4,285 \cdot t^2 - 0,035 \cdot t \Rightarrow 4,285 \cdot t^2 - 0,035 \cdot t - 100 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{0,035 \pm \sqrt{(-0,035)^2 - 4 \cdot 4,285 \cdot (-100)}}{8,57} = \frac{0,035 \pm \sqrt{1714}}{8,57} =$$

$$\frac{0,035 \pm 41,40}{8,57} \Rightarrow t_1 = 4,83 \quad t_2 = -4,83 (\notin D)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 8,57t - 0,035 \Rightarrow \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=4,83} = 8,57 \cdot 4,83 - 0,035 = 41,36 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

2.1

$$M(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad (t \text{ ist die Zeit in Jahren})$$

$$(I) \quad 50000 = c$$

$$(II) \quad 59999 = a + b + 50000$$

$$(III) \quad 72438 = 4a + 2b + 50000$$

$$(II) \Rightarrow b = 9999 - a$$

$$\Rightarrow 72438 = 4a + 2(9999 - a) + 50000 \Rightarrow 72438 = 4a + 19998 - 2a + 50000$$

$$\Rightarrow 2440 = 2a \Rightarrow a = 1220$$

$$\Rightarrow b = 9999 - 1220 = 8779$$

$$\Rightarrow M(t) = 1220t^2 + 8779t + 50000$$

2.2

$$(1) \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{72438 \text{ m}^3 - 50000 \text{ m}^3}{2 - 0} = \frac{22438 \text{ m}^3}{2} = 11219 \frac{\text{m}^3}{\text{Jahr}}$$

$$(2) \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{124395 \text{ m}^3 - 59999 \text{ m}^3}{5 - 1} = \frac{64396 \text{ m}^3}{4} = 16099 \frac{\text{m}^3}{\text{Jahr}}$$

$$2.3 \quad \frac{dM(t)}{dt} = 2440t + 8779 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=3} = 2440 \cdot 3 + 8779 = 16099 \frac{\text{m}^3}{\text{Jahr}}$$

$$3.1 \quad N(20) = 8200 \quad N(30,5) = 10521$$

$$3.2 \quad \frac{N(10) - N(0)}{10 - 0} = \frac{6400 - 5000}{10} = 140$$

$$3.3 \quad \dot{N}(t) = 4t + 120 \quad \Rightarrow \quad \dot{N}(10) = 4 \cdot 10 + 120 = 160$$

4 Für die Momentangeschwindigkeit  $v(t)$  gilt:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{20}{3}t^2 + 20t$$

Berechnung des Weges:

$$s(1) = -\frac{20}{9} \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 = \frac{70}{9}$$

$$s(2) = -\frac{20}{9} \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 = \frac{200}{9}$$

Berechnung der Geschwindigkeit:

$$v(1) = -\frac{20}{3} \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 = \frac{40}{3}$$

$$v(2) = -\frac{20}{3} \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = \frac{40}{3}$$

5.1

Größte Steigung oder größtes Gefälle liegt beim Wendepunkt vor.

$$w'(x) = \frac{1}{100}(3x^2 - 30x) \quad w''(x) = \frac{1}{100}(6x - 30)$$

$$w''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$w'''(x) = \frac{1}{100} \cdot 6 \Rightarrow w'''(5) \neq 0 \Rightarrow \text{WP bei } x=5$$

$$w'(5) = \frac{1}{100}(3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5) < 0 \Rightarrow \text{stärkstes Gefälle bei } x=5$$

5.2

$$b'(x) = \frac{1}{15}x - \frac{35}{36} \quad b'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{15}x - \frac{35}{36} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{525}{36}$$

Nachweis Minimum:

$$b''(x) = \frac{1}{15} \Rightarrow b''\left(\frac{525}{36}\right) = \frac{1}{15} > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x_2 = \frac{525}{36}$$

5.3

$$d(x) = b(x) - w(x)$$

$$d(x) = \frac{1}{30}x^2 - \frac{35}{36}x + 10 - \left(\frac{1}{100}x^3 - \frac{15}{100}x^2 + 5\right) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{11}{60}x^2 - \frac{35}{36}x + 5$$

5.4

Berechnung minimaler Abstand:  $d'(x) = 0$

$$d'(x) = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{11}{30}x - \frac{35}{36}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{100}x^2 + \frac{11}{30}x - \frac{35}{36} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{35}{9} \quad x_2 = \frac{25}{3}$$

$$d''(x) = -\frac{6}{100}x + \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow d''\left(\frac{35}{9}\right) = -\frac{6}{100} \cdot \frac{35}{9} + \frac{11}{30} > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x = \frac{35}{9} \Rightarrow \text{TP}\left(\frac{35}{9} / 3,40\right)$$

$$\Rightarrow d''\left(\frac{25}{3}\right) = -\frac{6}{100} \cdot \frac{25}{3} + \frac{11}{30} < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } x = \frac{25}{3} \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{25}{3} / 3,84\right)$$

Betrachtung der Ränder:

$$d(0) = 5 > 3,40 \quad d(10) = \frac{65}{18} \approx 3,61 > 3,40$$

$\Rightarrow$  Der absolut kleinste Abstand beträgt also 3,40 und somit wird der  
 Mindestabstand von 3,30 an jeder Stelle der Wasserrutsche eingehalten.

6.1 An den Stellen  $t_1 = 1$  und  $t_2 = 4$  weist der Graph „Knickstellen“ auf. Demnach ist die Funktion  $v(t)$  dort nicht differenzierbar.

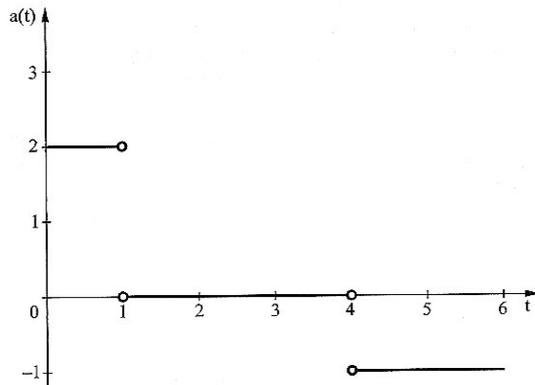
6.2

$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{für } 2 < t \leq 4 \\ -t + 6 & \text{für } 4 < t \leq 6 \end{cases}$$

$$v(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad v(5) = -5 + 6 = 1$$

6.3

$$a(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{für } 1 < t < 4 \\ -1 & \text{für } 4 < t \leq 6 \end{cases}$$



6.4 Der zurückgelegte Weg  $s$  ist die Fläche unter dem Graphen der Funktion  $v$ . Die Fläche ist ein Trapez mit den Grundseiten 6 und 3 sowie der Höhe 2.

$$s = \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot 2 = 9$$

$$7.1 \quad v(t) = g \cdot t \quad \Rightarrow 50 = g \cdot 5 \quad \Rightarrow g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

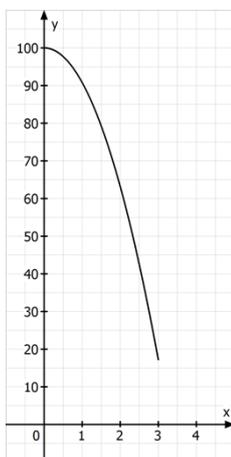
$$7.2 \quad v(10) = 10 \cdot 10 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7.3

$$20 = 0,5 \cdot 10 \cdot t^2 \quad \Rightarrow t^2 = 4 \quad \Rightarrow t = 2$$

$$v(2) = 10 \cdot 2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8.1



8.2

$$f(0) = 100$$

Zu Beginn der Aufzeichnung war das Fahrzeug 100 m vom Polizisten entfernt.

8.3

$$v_s = \frac{s(0) - s(3)}{3} = \frac{100 - 17,2}{3} = 27,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen 0 und 3 Sekunden beträgt  $27,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

8.4

$$v_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{90,8 - (-9,2x^2 + 100)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9,2x^2 - 9,2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [9,2(x + 1)] = 18,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

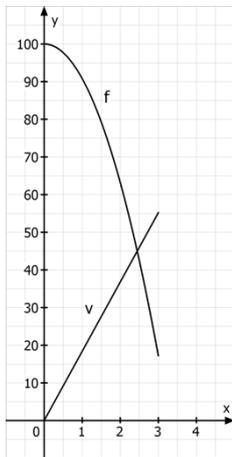
$$v_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{63,2 - (-9,2x^2 + 100)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9,2x^2 - 36,8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} [9,2(x + 2)] = 36,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

8.5

$$v_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-9,2x_0^2 + 100 - (-9,2x^2 + 100)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{9,2x^2 - 9,2x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [9,2(x + x_0)] = 18,4x_0$$

8.6



Das Fahrzeug überschreitet die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h ( $27,8 \text{ m/s}$ ) ab etwa 1,5 Sekunden und wird danach immer schneller.

8.7  $v(0) = 0$ , d.h. das Fahrzeug stand zu Beginn der Messung.

$$9.1 \quad s(1) = 30 \cdot 1 - 0,5 \cdot 10 \cdot 1 = 25 \text{ m} \quad s(2) = 40 \text{ m} \quad s(5) = 25 \text{ m}$$

9.2

$$v(t) = v_0 - g \cdot t$$

$$v(1) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(2) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(5) = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9.3

$$33,75 = 30t - 5t^2 \Rightarrow 5t^2 - 30t + 33,75 = 0 \Rightarrow t_1 = 4,5 \text{ s} \quad t_2 = 1,5 \text{ s}$$

$$v(1,5) = 30 - 10 \cdot 1,5 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9.4

$$s(0) = 0 \Rightarrow 30t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 6$$

Der Ball hat nach 6 Sekunden wieder die Abwurfhöhe erreicht.

9.5

$$t_s = -\frac{30}{-10} = 3 \quad s(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = 45$$

Der Ball erreicht nach 3 Sekunden seine höchste Flughöhe von 45 m.

10.1

$$\text{AB: } \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{244 - 0}{2} = 122 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 12,2\%$$

$$\text{BC: } \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{156,25 - 244}{5} = -17,55 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 1,755\%$$

$$\text{CD: } \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{500 - 156,25}{5} = 68,75 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 6,875\%$$

$$\text{DE: } \frac{f(12) - f(10)}{12 - 10} = \frac{144 - 500}{2} = -178 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 17,8\%$$

$$\text{AE: } \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{144 - 0}{12} = 12 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 1,2\%$$

10.2

$$f'(x) = -3x^3 + 51x^2 - 240x + 300$$

$$f'(1) = 108 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 10,8\%$$

$$f'(3) = -42 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 4,2\%$$

$$f'(8) = 108 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 10,8\%$$

$$f'(11) = -162 \frac{\text{m}}{\text{km}} \quad 16,2\%$$

10.3

$$\begin{aligned}
 -3x^3 + 51x^2 - 240x + 300 &= 108 \Rightarrow -3x^3 + 51x^2 - 240x + 192 = 0 \quad x_1 = 1 \\
 (-3x^3 + 51x^2 - 240x + 192) : (x-1) &= -3x^2 + 48x - 192 \\
 -3x^2 + 48x - 192 &= 0 \Rightarrow x_2 = 8
 \end{aligned}$$

10.4

$$\begin{aligned}
 -3x^3 + 51x^2 - 240x + 300 &= 0 \Rightarrow x_1 = 5 \\
 (-3x^3 + 51x^2 - 240x + 300) : (x-5) &= -3x^2 + 36x - 60 \\
 -3x^2 + 36x - 60 &= 0 \Rightarrow x_2 = 2 \quad x_3 = 10 \\
 f(2) &= 244 \text{ m} \quad f(5) = 156,25 \text{ m} \quad f(10) = 500 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$11.1 \quad \frac{f(0) - f(150)}{150 - 0} = \frac{60 - 45}{150} = 0,1 \frac{\text{l}}{\text{km}} = 10 \frac{\text{l}}{100\text{km}}$$

$$11.2 \quad f'(x) = -\frac{2}{1500}x \quad f'(50) = -0,067 \Rightarrow 6,7 \frac{\text{l}}{100\text{km}}$$

12.1

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{5}{4} \left( \frac{14675}{9}x^2 - 8805x + 11299,75 \right) \\
 f'(2,1) &= 0 \quad f'(3,3) = 0 \\
 \text{Skizze von } \frac{5}{4} \left( \frac{14675}{9}x^2 - 8805x + 11299,75 \right) &:
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 2,1 \text{ HOP} \quad x = 3,3 \text{ TIP}$$

12.2

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{5}{4} \left( \frac{29350}{9}x - 8805 \right) \\
 \frac{5}{4} \left( \frac{29350}{9}x - 8805 \right) &= 0 \Rightarrow x = 2,7 \\
 \text{Skizze von } \frac{5}{4} \left( \frac{29350}{9}x - 8805 \right) &:
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{größtes Gefälle bei 27 km (da } f'(2,7) < 0)$$

$$13.1 \quad h(0) = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \text{ m}$$

13.2

$$h(0,5) = 2,89$$

$$\Rightarrow P^* = 1 + 2 \cdot 1,89 = 4,78 \text{ m}$$

13.3

$$h(1) = 4,125 \text{ m}$$

Der tatsächliche Pegelstand nach einem Tag ist geringer, also steigt der Pegel in der zweiten Hälfte des ersten Tages nicht mehr so stark an.

13.4

$$h'(t) = \frac{1}{8}(3t^2 - 24t + 36)$$

$$h'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Rightarrow t_1 = 6 \quad t_2 = 2$$

Skizze von  $\frac{1}{8}(3t^2 - 24t + 36)$ :

$\Rightarrow$  Maximaler Pegelstand bei  $t = 2$  mit 5 m.

13.5

$$h''(t) = \frac{1}{8}(6t - 24)$$

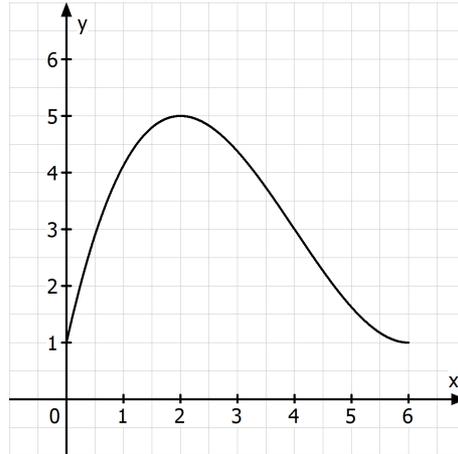
$$h''(t) = 0 \Rightarrow 6t - 24 = 0 \Rightarrow t = 4$$

Skizze von  $\frac{1}{8}(6t - 24)$ :

$$\Rightarrow h'(4) = -1,5 < 0$$

$\Rightarrow$  Bei  $t = 4$  nimmt der Pegelstand am stärksten ab.

13.6



13.7

$$\frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8) = 3 \Rightarrow \frac{1}{8}t^3 - 1,5t^2 + 4,5t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 4$$

$$\left( \frac{1}{8}t^3 - 1,5t^2 + 4,5t - 2 \right) : (t - 4) = \frac{1}{8}t^2 - t + 0,5$$

$$\frac{1}{8}t^2 - t + 0,5 = 0 \Rightarrow (t_2 = 7,46) \notin D_h \quad t_3 = 0,54$$

Der Alarm wird nach gut einem halben Tag ausgelöst und nach 4 Tagen wieder aufgehoben.

14.1

$$f(0) = 0 \quad f(8) = 768$$

Es müssen insgesamt 768 Höhenmeter bis zum Gipfel zurückgelegt werden.

Es werden in waagrechter Richtung 8 km bis zum Gipfel zurückgelegt.

14.2  $f(9) = 634,5$  m

14.3

$$-1,5x^4 + 24x^3 - 108x^2 + 192x = 192 \Rightarrow -1,5x^4 + 24x^3 - 108x^2 + 192x - 192 = 0$$

Nach Zeichnung ist das für  $x = 4$  der Fall.

$$-1,5 \cdot 4^4 + 24 \cdot 4^3 - 108 \cdot 4^2 + 192 \cdot 4 - 192 = 0 \Rightarrow 0 = 0 (w)$$

14.4

$$f'(x) = -6x^3 + 72x^2 - 216x + 192$$

$$f''(x) = -18x^2 + 144x - 216$$

$$-18x^2 + 144x - 216 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 6$$

Skizze von  $-18x^2 + 144x - 216$ :

$$f'(6) = 192 > 0$$

$\Rightarrow$  die steilste Stelle liegt bei  $x = 6$

$$f(6) - f(3) = 504 - 130,5 = 373,5 \text{ m}$$

14.5 Die Stelle mit der geringsten Steigung liegt bei  $x = 2$ ;  $f(2) = 120 \text{ m}$ ;

14.6

$$\text{Mittlere Steigung des Anstiegs: } \frac{f(8) - f(3)}{8 - 3} = \frac{768 - 130,5}{5} = 127,5 \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

$$\text{Mittlere Steigung der gesamten Wanderung: } \frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{634,5 - 0}{9} = 70,5 \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

14.7

$$f'(0) = 192$$

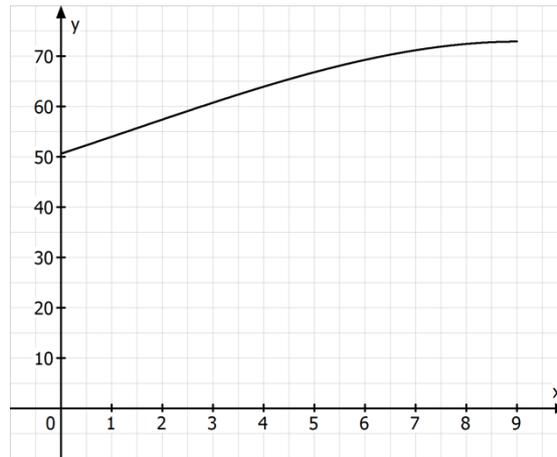
$$-6x^3 + 72x^2 - 216x + 192 = 192 \Rightarrow -6x^3 + 72x^2 - 216x = 0$$

$$\Rightarrow -6x(x^2 - 12x + 36) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$$

Nach sechs Kilometer steigt der Weg genauso steil an wie zu Beginn der Wanderung.

15.1



In den ersten neun Lebensmonaten wächst das Kind immer mehr, am Anfang wächst es stärker als am Ende.

15.2

$$f'(x) = -0,06t^2 + 0,18t + 3,285$$

$$-0,06t^2 + 0,18t + 3,285 = 0 \Rightarrow (t_1 = 9,08) \notin D_g \quad (t_2 = -6,08) \notin D_g$$

$\Rightarrow f$  hat im Intervall  $[0;9]$  keine Extremstellen;

$$f''(x) = -0,12t + 0,18$$

$$-0,12t + 0,18 = 0 \Rightarrow t = 1,5$$

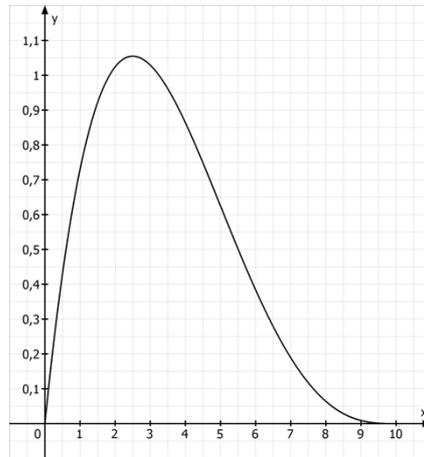
Skizze von  $(-0,12t + 0,18)$ :

$\Rightarrow x = 1,5$  Wendepunkt

15.3 Am Wendepunkt bei  $x = 1,5$  liegt das stärkste Wachstum des Kindes in den ersten neun Lebensmonaten vor.

15.4  $g$  ist nicht geeignet, das Wachstum eines Kindes im gesamten ersten Lebensjahr darzustellen, weil der Graph von  $g$  bei  $t = 9,08$  einen Hochpunkt besitzt und dann die Größe des Kindes abnehmen würde.

16.1



16.2 Die Konzentration des Medikamentenwirkstoffs nimmt bis etwa 2,5 Stunden zu und nimmt dann wieder ab, bis nach etwa 10 Stunden kein Wirkstoff im Blut mehr vorhanden ist.

16.3

$$f'(t) = -0,004t^3 + 0,09t^2 - 0,6t + 1$$

$$-0,004t^3 + 0,09t^2 - 0,6t + 1 = 0 \quad t_1 = 10$$

$$(-0,004t^3 + 0,09t^2 - 0,6t + 1) : (t - 10) = -0,004t^2 + 0,05t - 0,1$$

$$-0,004t^2 + 0,05t - 0,1 = 0 \Rightarrow t_2 = 10 \quad t_3 = 2,5$$

Skizze von  $(-0,004t^3 + 0,09t^2 - 0,6t + 1)$ :

$\Rightarrow$  HOP bei  $x = 2,5$

$$f(2,5) = 1,05 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$$

16.4 Eine positive Steigung bedeutet, dass die Wirkstoffkonzentration im Blut zunimmt, eine negative Steigung bedeutet, dass die Wirkstoffkonzentration im Blut abnimmt.

16.5

$$f'(1) = -0,004 \cdot 1^3 + 0,09 \cdot 1^2 - 0,6 \cdot 1 + 1 = 0,486$$

Die Wirkstoffkonzentration im Blut nimmt bei  $t = 1$  um  $0,486 \frac{\text{mg}}{\text{ml}}$  pro Stunde zu.

16.6 Die Wirkstoffkonzentration des Medikaments wird im Zeitraum 0 bis 10 Stunden sinnvoll beschrieben.

16.7

$$-0,001t^4 + 0,03t^3 - 0,3t^2 + t = 0,3$$

$$\Rightarrow -0,001t^4 + 0,03t^3 - 0,3t^2 + t - 0,3 \geq 0$$

Nach Zeichnung wirkt das Medikament im Zeitraum  $t \in [0,3; 6,3]$

17.1

$$f'(x) = -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{4}x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$\left( -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{4}x + 5 \right) : (x-4) = -\frac{1}{80}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$-\frac{1}{80}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 10$$

$$\text{Skizze von } \left( -\frac{1}{80}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{4}x + 5 \right):$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ HOP} \Rightarrow G(4/2,2)$$

17.2

Gerade AB:  $y = mx + t$

$$m = \frac{0,85 - 0}{10 - 13} = -\frac{17}{60}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{17}{60}x + t \Rightarrow 0 = -\frac{17}{60} \cdot 13 + t \Rightarrow t = \frac{221}{60}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{17}{60}x + \frac{221}{60}$$

$$\text{Länge der Geraden AB: } d = \sqrt{0,85^2 + 3^2} = 3,12$$

17.3

$$f''(x) = -\frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 10$$

$$\text{Skizze von } \left( -\frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{9}{4} \right):$$

$$\Rightarrow \text{größte Steigung bei } x = 6 \quad P(6/1,65)$$

17.4.1

$$f(4)=2,2 \quad p(4)=2,2$$

$$f'(4)=0 \quad p'(x)=-\frac{1}{20}x+\frac{1}{5} \Rightarrow p'(4)=0$$

An der Stelle  $x = 4$  berühren sich die beiden Graphen von  $f$  und  $p$ .

$$17.4.2 \quad -\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{5}x + 1,8 = 0 \Rightarrow x_1 = -5,4 \quad x_2 = 13,4 \Rightarrow Q(13,4/0)$$

17.4.3

$$f'(12) = -0,4 \quad p'(12) = -0,4$$

Die Steigung des Bergmassivs und die Steigung der Flugkurve des  
Gleitschirmfliegers sind an der Stelle  $x = 12$  gleich.

17.4.4

